



ISSN 2518-7929



№ 1(85)/2017

МАТЕМАТИКА сериясы

Серия МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS Series

ҚАРАҒАНДЫ  
УНИВЕРСИТЕТІНІҢ  
ХАБАРШЫСЫ

ВЕСТНИК  
КАРАГАНДИНСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN  
OF THE KARAGANDA  
UNIVERSITY

ISSN 2518-7929

Индексі 74618

Индекс 74618

# ҚАРАҒАНДЫ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

---

ВЕСТНИК  
КАРАГАНДИНСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN  
OF THE KARAGANDA  
UNIVERSITY

---

МАТЕМАТИКА сериясы

Серия МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS Series

№ 1(85)/2017

Қаңтар–ақпан–наурыз

30 наурыз 2017 ж.

Январь–февраль–март

30 марта 2017 г.

January–February–March

March, 30, 2017

1996 жылдан бастап шығады

Издается с 1996 года

Founded in 1996

Жылына 4 рет шығады

Выходит 4 раза в год

Published 4 times a year

Қарағанды, 2017

Караганда, 2017

Karaganda, 2017

*Бас редакторы*  
ЖМ ХҒА академигі, заң ғыл. д-ры, профессор  
**Е.Қ.Көбеев**

*Бас редактордың орынбасары*      **Х.Б.Омаров**, техн. ғыл. д-ры  
*Жауапты хатшы*                      **Г.Ю.Аманбаева**, филол. ғыл. д-ры

*Редакция алқасы*

|                         |                                                  |
|-------------------------|--------------------------------------------------|
| <b>А.Р.Ешкеев,</b>      | ғылыми редактор физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан); |
| <b>М.Отелбаев,</b>      | ҚР ҰҒА акад., физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);   |
| <b>Б.Р.Ракишев,</b>     | ҚР ҰҒА акад., техн. ғыл. д-ры (Қазақстан);       |
| <b>Т.Бекжан,</b>        | профессор (Қытай);                               |
| <b>Б.Пуаза,</b>         | профессор (Франция);                             |
| <b>А.А.Шкаликов,</b>    | физ.-мат. ғыл. д-ры (Ресей);                     |
| <b>А.С.Морозов,</b>     | физ.-мат. ғыл. д-ры (Ресей);                     |
| <b>Г.Акишев,</b>        | физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);                 |
| <b>Н.А.Бокаев,</b>      | физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);                 |
| <b>М.Т.Дженалиев,</b>   | физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);                 |
| <b>К.Т.Искаков,</b>     | физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);                 |
| <b>Л.К.Кусаинова,</b>   | физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);                 |
| <b>Е.Д.Нурсултанов,</b> | физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);                 |
| <b>М.И.Рамазанов,</b>   | физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);                 |
| <b>Е.С.Смаилов,</b>     | физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);                 |
| <b>У.У.Умербаев,</b>    | физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);                 |
| <b>Н.Т.Орумбаева,</b>   | жауапты хатшы физ.-мат. ғыл. канд. (Қазақстан)   |

*Редакцияның мекенжайы:* 100028, Қазақстан, Қарағанды қ., Университет к-сі, 28  
Тел.: (7212) 77-03-69 (ішкі 1026); факс: (7212) 77-03-84.  
E-mail: [vestnick\\_kargu@ksu.kz](mailto:vestnick_kargu@ksu.kz). Сайт: [vestnik.ksu.kz](http://vestnik.ksu.kz)

*Редакторы*  
**Ж.Т.Нурмуханова**  
*Компьютерде беттеген*  
**Г.Қ.Қалел**

**Қарағанды университетінің хабаршысы. «Математика» сериясы.**  
**ISSN 2518-7929.**

Меншік иесі: «Академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті» РММ.  
Қазақстан Республикасының Мәдениет және ақпарат министрлігімен тіркелген. 23.10.2012 ж.  
№ 13104-Ж тіркеу куәлігі.

Басуға 29.03.2017 ж. қол қойылды Пішімі 60×84 1/8. Қағазы офсеттік. Көлемі 10,0 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша. Тапсырыс № 19.

Е.А.Бөкетов атындағы ҚарМУ баспасының баспаханасында басылып шықты.  
100012, Қазақстан, Қарағанды қ., Гоголь к-сі, 38. Тел. 51-38-20. E-mail: [izd\\_kargu@mail.ru](mailto:izd_kargu@mail.ru)

© Қарағанды мемлекеттік университеті, 2017

*Главный редактор*  
академик МАН ВШ, д-р юрид. наук, профессор  
**Е.К.Кубеев**

*Зам. главного редактора* **Х.Б.Омаров**, д-р техн. наук  
*Ответственный секретарь* **Г.Ю.Аманбаева**, д-р филол. наук

*Редакционная коллегия*

|                         |                                                             |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------|
| <b>А.Р.Ешкеев,</b>      | научный редактор д-р физ.-мат. наук<br>(Казахстан);         |
| <b>М.Отелбаев,</b>      | акад. НАН РК, д-р физ.-мат. наук<br>(Казахстан);            |
| <b>Б.Р.Ракишев,</b>     | акад. НАН РК, д-р техн. наук<br>(Казахстан);                |
| <b>Т.Бекжан,</b>        | профессор (Китай);                                          |
| <b>Б.Пуаза,</b>         | профессор (Франция);                                        |
| <b>А.А.Шкаликов,</b>    | д-р физ.-мат. наук (Россия);                                |
| <b>А.С.Морозов,</b>     | д-р физ.-мат. наук (Россия);                                |
| <b>Г.Акишев,</b>        | д-р физ.-мат. наук (Казахстан);                             |
| <b>Н.А.Бокаев,</b>      | д-р физ.-мат. наук (Казахстан);                             |
| <b>М.Т.Дженалиев,</b>   | д-р физ.-мат. наук (Казахстан);                             |
| <b>К.Т.Искаков,</b>     | д-р физ.-мат. наук (Казахстан);                             |
| <b>Л.К.Кусаинова,</b>   | д-р физ.-мат. наук (Казахстан);                             |
| <b>Е.Д.Нурсултанов,</b> | д-р физ.-мат. наук (Казахстан);                             |
| <b>М.И.Рамазанов,</b>   | д-р физ.-мат. наук (Казахстан);                             |
| <b>Е.С.Смаилов,</b>     | д-р физ.-мат. наук (Казахстан);                             |
| <b>У.У.Умербаев,</b>    | д-р физ.-мат. наук (Казахстан);                             |
| <b>Н.Т.Орумбаева,</b>   | ответственный секретарь<br>канд. физ.-мат. наук (Казахстан) |

*Адрес редакции:* 100028, Казахстан, г. Караганда, ул. Университетская, 28  
Тел.: (7212) 77-03-69 (внутр. 1026); факс: (7212) 77-03-84.  
E-mail: [vestnick\\_kargu@ksu.kz](mailto:vestnick_kargu@ksu.kz). Сайт: [vestnik.ksu.kz](http://vestnik.ksu.kz)

*Редактор*  
**Ж.Т.Нурмуханова**  
*Компьютерная верстка*  
**Г.К.Калел**

**Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика».**  
**ISSN 2518-7929.**

Собственник: РГП «Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова».  
Зарегистрирован Министерством культуры и информации Республики Казахстан. Регистрационное  
свидетельство № 13104–Ж от 23.10.2012 г.

Подписано в печать 29.03.2017 г. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная. Объем 10,0 п.л. Тираж 300 экз.  
Цена договорная. Заказ № 19.

Отпечатано в типографии издательства КарГУ им. Е.А.Букетова  
100012, Казахстан, г. Караганда, ул. Гоголя, 38, тел.: (7212) 51-38-20. E-mail: [izd\\_kargu@mail.ru](mailto:izd_kargu@mail.ru)

© Карагандинский государственный университет, 2017

*Main Editor*  
Academician of IHEAS, Doctor of Law, Professor  
**Ye.K.Kubeyev**

*Deputy main Editor*  
*Responsible secretary*

**Kh.B.Omarov**, Doctor of techn. sciences  
**G.Yu.Amanbayeva**, Doctor of phylol. sciences

*Editorial board*

|                          |                                                                     |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| <b>A.R.Yeshkeyev</b> ,   | Science Editor Doctor of phys.–math. sciences<br>(Kazakhstan);      |
| <b>M.Otelbayev</b> ,     | Academician NAS RK, Doctor of phys.–math. sciences<br>(Kazakhstan); |
| <b>B.R.Rakishev</b> ,    | Academician of NAS RK, Doctor of techn. sciences<br>(Kazakhstan);   |
| <b>T.Bekjan</b> ,        | Professor (China);                                                  |
| <b>B.Poizat</b> ,        | Professor (France);                                                 |
| <b>A.A.Shkalikov</b> ,   | Dr. of phys.–math. sciences (Russia);                               |
| <b>A.S.Morozov</b> ,     | Dr. of phys.–math. sciences. (Russia);                              |
| <b>G.Akishev</b> ,       | Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);                           |
| <b>N.A.Bokaev</b> ,      | Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);                           |
| <b>M.T.Jenaliyev</b> ,   | Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);                           |
| <b>K.T.Iskakov</b> ,     | Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);                           |
| <b>L.K.Kusainova</b> ,   | Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);                           |
| <b>E.D.Nursultanov</b> , | Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);                           |
| <b>M.I.Ramazanov</b> ,   | Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);                           |
| <b>E.S.Smailov</b> ,     | Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);                           |
| <b>U.U.Umerbaev</b> ,    | Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);                           |
| <b>N.T.Orumbayeva</b> ,  | Secretary cand. of phys.–math. sciences<br>(Kazakhstan)             |

*Postal address:* 28, University Str., 100028, Kazakhstan, Karaganda  
Tel.: (7212) 77-03-69 (add. 1026); fax: (7212) 77-03-84.  
E-mail: vestnick\_kargu@ksu.kz. Web-site: vestnik.ksu.kz

*Editor*  
Zh.T.Nurmukhanova  
*Computer layout*  
G.K.Kalel

**Bulletin of the Karaganda University. «Mathematics» series.**  
**ISSN 2518-7929.**

Proprietary: RSE «Academician Ye.A.Buketov Karaganda State University».

Registered by the Ministry of Culture and Information of the Republic of Kazakhstan. Registration certificate No. 13104–Zh from 23.10.2012.

Signed in print 29.03.2017. Format 60×84 1/8. Offset paper. Volume 10,0 p.sh. Circulation 300 copies.  
Price upon request. Order № 19.

Printed in the Ye.A.Buketov Karaganda State University Publishing house.

38, Gogol Str., 100012, Kazakhstan, Karaganda, Tel.: (7212) 51-38-20. E-mail: izd\_kargu@mail.ru

© Karaganda State University, 2017

---

## МАЗМҰНЫ

### МАТЕМАТИКА

|                                                                                                                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Балкизов Ж.А.</i> Уақыт бойынша бейлокалды шарттары бар үшінші ретті теңдеу үшін шеттік есеп                                                                                          | 8  |
| <i>Букетов А.В., Акимов А.В., Нигалатий В.Д., Браило Н.В., Аль-Джаватери Али Андан Мансур.</i> Қорғаныш жабын құрамын оңтайландыру мақсатында математикалық статистика әдістерін қолдану | 17 |
| <i>Дженалиев М.Т., Исаков С.А., Рамазанов М.И.</i> Бұрыштық облыстағы бір параболалық есеп жайында                                                                                       | 28 |
| <i>Ешкеев А.Р.</i> Йонсондық жиынның байытылуына қатысты орталық типтердің қасиеттері                                                                                                    | 36 |
| <i>Ешкеев А.Р.</i> Йонсондық байытылу фрагменттерінің компаньондары                                                                                                                      | 41 |
| <i>Жанбусинова Б.Х., Исакова Г.Ш., Шаукенова К.С., Шаяхметова Б.К., Мукашева А.К.</i> Виртуалды университеттің модульдері                                                                | 46 |
| <i>Ыбыраев Ш.Ш.</i> Алгебралық группалар үшін жай шектелген модульдердің когомологиялары туралы                                                                                          | 52 |
| <i>Қоңырханова Ә.Ә., Романьков В.А.</i> Ли алгебрасында коммутаторлық теңдеулердің шешімділігі туралы                                                                                    | 57 |
| <i>Луцак С.М.</i> Унарлық алгебра квазикөпбейне торларының күрделілігі                                                                                                                   | 65 |
| <i>Орумбаева Н.Т., Сабитбекова Г.</i> Еркін функциялары бар сызықты емес дифференциалдық теңдеу үшін қойылған бір шеттік есеп туралы                                                     | 71 |

### МЕРЕЙТОЙ ИЕЛЕРІ

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор М.Т.Дженалиев 70 жаста | 77 |
| АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР                                               | 79 |

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

|                                                                                                                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Балкизов Ж.А.</i> Краевая задача для уравнения третьего порядка с нелокальным условием по времени .....                                                                              | 8  |
| <i>Букетов А.В., Акимов А.В., Нигалатий В.Д., Браило Н.В., Аль-Джавахери Али Андан Мансур.</i> Применение методов математической статистики для оптимизации состава защитных покрытий . | 17 |
| <i>Дженалиев М.Т., Исаков С.А., Рамазанов М.И.</i> Об однородной параболической задаче в бесконечной угловой области .....                                                              | 28 |
| <i>Ешкеев А.Р.</i> Свойства центральных типов относительно обогащения йонсоновским множеством ..                                                                                        | 36 |
| <i>Ешкеев А.Р.</i> Компаньоны фрагментов йонсоновского обогащения .....                                                                                                                 | 41 |
| <i>Жанбусинова Б.Х., Исакова Г.Ш., Шаукенова К.С., Шаяхметова Б.К., Мукашева А.К.</i> Модули виртуального университета .....                                                            | 46 |
| <i>Ибраев Ш.Ш.</i> О когомологии простых ограниченных модулей для алгебраических групп .....                                                                                            | 52 |
| <i>Коньратанова А.А., Романьков В.А.</i> О разрешимости коммутаторных уравнений в алгебрах Ли ..                                                                                        | 57 |
| <i>Луцак С.М.</i> Сложность решеток квазимногообразий унарных алгебр .....                                                                                                              | 65 |
| <i>Орумбаева Н.Т., Сабитбекова Г.</i> О краевой задаче для нелинейного дифференциального уравнения с произвольными функциями .....                                                      | 71 |

### НАШИ ЮБИЛЯРЫ

|                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------|----|
| Доктору физико-математических наук, профессору М.Т.Дженалиеву — 70 лет ..... | 77 |
| СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ .....                                                    | 79 |

---

## CONTENTS

### MATHEMATICS

|                                                                                                                                                                                                            |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Balkizov Zh.A.</i> A boundary value problem for a third-order equation with a nonlocal condition for the time .....                                                                                     | 8  |
| <i>Buketov A.V., Akimov A.V., Nigalatii V.D., Brailo N.V., Al-Dzhavakheri Ali Andan Mansur.</i> Application of methods of mathematical statistics to optimize the composition of protective coatings ..... | 17 |
| <i>Jenaliyev M.T., Iskakov S.A., Ramazanov M.I.</i> On a parabolic problem in an infinite corner domain ..                                                                                                 | 28 |
| <i>Yeshkeyev A.R.</i> The properties of central types with respect to enrichment by Jonsson set .....                                                                                                      | 36 |
| <i>Yeshkeyev A.R.</i> Companions of the fragments in the Jonsson enrichment .....                                                                                                                          | 41 |
| <i>Zhanbusinova B.H., Iskakova G.Sh., Shaukenova K.S., Shayakhmetova B.K., Mukasheva A.K.</i> Virtual University modules .....                                                                             | 46 |
| <i>Ibraev Sh.Sh.</i> On the cohomology of simple restricted modules for algebraic groups .....                                                                                                             | 52 |
| <i>Konyrkhanova A.A., Roman'kov V.A.</i> On solvability of commutator equations in Lie algebras .....                                                                                                      | 57 |
| <i>Lutsak S.M.</i> The complexity of quasivariety lattices of unary algebras .....                                                                                                                         | 65 |
| <i>Orumbayeva N.T., Sabitbekova G.</i> A boundary value problem for nonlinear differential equation with arbitrary functions .....                                                                         | 71 |

### OUR ANNIVERSARIES

|                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Doctor of physical and mathematical sciences, Professor M.T.Dzhenaliev 70 years old ..... | 77 |
| INFORMATION ABOUT AUTHORS .....                                                           | 79 |

С.М. Луцак

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан  
(E-mail: sveta\_lutsak@mail.ru)

## Сложность решеток квазимногообразий унарных алгебр

Вопрос о том, что считать сложностью решетки квазимногообразий и какие решетки квазимногообразий являются сложными согласно той или иной мере сложности, а какие — нет, изучался многими авторами. В статье рассмотрены две меры сложности решеток квазимногообразий. Проведено исследование сложности строения решеток квазимногообразий унарных алгебр. Изучена взаимосвязь между двумя мерами сложности решеток квазимногообразий. М.В. Швидефски и А. Замойска-Дженио была поставлена следующая проблема: существует ли не  $Q$ -универсальный класс, для которого множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий невычислимо? Автором доказана выполнимость нетривиального тождества на решетках квазимногообразий унарных алгебр, вследствие чего получен определенный результат относительно данной проблемы.

**Ключевые слова:** невычислимое множество, решетки квазимногообразий,  $Q$ -универсальность, унарный функциональный символ, нижняя полурешетка, унарная алгебра, сложность решетки.

### 1 Введение

В работе проводится исследование сложности решеток квазимногообразий унарных алгебр. Рассматриваются две хорошо известные меры сложности: *невычислимость* множества всех конечных подрешеток решеток квазимногообразий и  *$Q$ -универсальность*. Напомним, что *унарной алгеброй* называется алгебра, сигнатура которой состоит только из одного унарного функционального символа. Квазимногообразия унарных алгебр изучались А.М. Нуракуновым в [1], см. также работы В.К. Карташова [2–4]. А.М. Нуракунов построил квазимногообразие  $K$  унарных алгебр, такое что множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий  $Lq(K)$  является *невычислимым* [1], т.е. не существует алгоритма, позволяющего для данной конечной решетки определить, является ли она подрешеткой решетки  $Lq(K)$  или нет. Существование квазимногообразий с таким свойством свидетельствует об исключительной сложности строения решеток квазимногообразий, в связи с чем известная проблема Биркгофа-Мальцева [5–7] может оказаться сложнее, чем ожидалось: нахождение описания решеток, изоморфных решеткам квазимногообразий, даже для определенных классов алгебраических систем, может быть весьма сложным. Другой мерой сложности строения решеток квазимногообразий является  *$Q$ -универсальность*. Согласно М.В. Сапиру [8], квазимногообразие  $K$  будет  *$Q$ -универсальным*, если для любого квазимногообразия  $R$  конечной сигнатуры решетка  $Lq(R)$  является гомоморфным образом некоторой подрешетки в решетке  $Lq(K)$ . В настоящее время известно много различных  $Q$ -универсальных квазимногообразий (см. [5, 8, 9]).  $Q$ -универсальность квазимногообразия унарных алгебр была доказана В.А. Горбуновым в работе [10], см. также работу А.В. Кравченко [11]. В [12] была установлена связь между двумя мерами сложности, а именно было доказано, что класс  $K$  *всех* систем сигнатуры  $\sigma$  является  $Q$ -универсальным тогда и только тогда, когда он содержит подкласс  $R$ , такой что множество всех конечных подрешеток решетки  $Lq(R)$  невычислимо. В этой связи возникла следующая проблема [9, 12]: верно ли, что любой  $Q$ -универсальный класс систем  $K$  фиксированной сигнатуры содержит подкласс  $R$ , такой что множество всех конечных подрешеток решетки  $Lq(R)$  невычислимо? И существует ли класс  $K$ , не являющийся  $Q$ -универсальным, но, тем не менее, обладающий указанным выше свойством? Автором показано, что решетки квазимногообразий унарных алгебр удовлетворяют нетривиальному тождеству. Вследствие чего установлено существование континуума квазимногообразий  $K$  унарных алгебр, таких что множества всех конечных подрешеток решеток квазимногообразий  $Lq(K)$  невычислимы, но, тем не менее, не являются  $Q$ -универсальными, см. теоремы 2 и 3.

## 2 Основные понятия

Частично упорядоченное множество  $\mathcal{S}$  называется *нижней полурешеткой*, если любые два элемента  $x, y \in \mathcal{S}$  имеют точную нижнюю грань  $x \wedge y$  [5; 9]. Двойственным образом определяется верхняя полурешетка. Частично упорядоченное множество  $\mathcal{S}$  называется *решеткой*, если оно одновременно является верхней и нижней полурешетками [5; 10]. Решетка  $\mathcal{S}$  называется *полной*, если любое подмножество  $A \subseteq \mathcal{S}$  имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани [5; 11]. Для нижней полурешетки  $\mathcal{S} = \langle \mathcal{S}; \wedge \rangle$  обозначим через  $\text{Sub}(\mathcal{S})$  решетку всех нижних подполурешеток в  $\mathcal{S}$ . Для любых двух подполурешеток  $S_0, S_1 \in \text{Sub}(\mathcal{S})$  множество

$$S_0 + S_1 = \{s_0 \wedge s_1 \mid s_0 \in S_0, s_1 \in S_1\}$$

является наименьшей нижней подполурешеткой в  $\mathcal{S}$ , содержащей  $S_0 \cup S_1$ , т. е. решеточным объединением  $S_0$  и  $S_1$  в  $\text{Sub}(\mathcal{S})$  [9].

Все рассматриваемые классы алгебраических систем являются *абстрактными*, т. е. замкнутыми, относительно изоморфизмов [13; 207]. Обозначим через  $K(\sigma)$  класс всех систем сигнатуры  $\sigma$ , через  $S(K)$  — класс всех систем из  $K(\sigma)$ , изоморфных подсистемам систем из  $K$  [5; 24]. Пусть  $R \subseteq K \subseteq K(\sigma)$ . Тогда  $R$  называется *K-квазиэквивалентным*, если

$$R = K \cap \text{Mod}(\Sigma)$$

для некоторого множества  $\Sigma$  квазитождеств сигнатуры  $\sigma$  [5; 117].

Множество всех *K-квазиэквивалентных* подклассов в  $K$ , упорядоченное по включению, образует полную решетку, которая называется *решеткой K-квазимонообразий*, или *решеткой относительных квазимонообразий*, когда  $K$  легко восстанавливается из контекста и обозначается  $\text{Lq}(K)$  [9]. Если класс  $K$  является квазимонообразием, т. е. классом, определенным некоторым множеством квазитождеств сигнатуры  $\sigma$ , то *K-квазиэквивалентный* подкласс называют *подквазимонообразием K*. Множество всех подквазимонообразий  $K$ , упорядоченное по включению, образует полную решетку, которая называется *решеткой квазимонообразий K* и обозначается  $\text{Lq}(K)$  [1]. Отметим, что понятия здесь неопределенные, см. в [5; 13]. Также нам потребуются следующие утверждения. Пусть  $2$  обозначает двухэлементную решетку, а запись

$$\mathcal{A} \leq_s \prod \{\mathcal{A}_n \mid n \in N\}$$

означает, что система  $\mathcal{A}$  является *подпрямым произведением* семейства систем  $\mathcal{A}_n$ ,  $n \in N$ .

*Теорема 1* [1, теорема 2]. Пусть  $M$  — бесконечное множество конечных нижних полурешеток. Тогда существует квазимонообразие  $K$  унарных алгебр, такое что

$$\text{Lq}(K) \leq_s \prod \{\text{Sub}(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \in M\} \times 2.$$

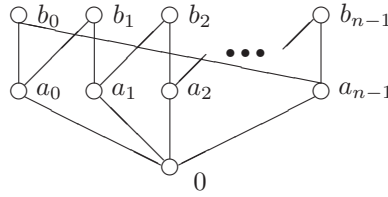
*Лемма 1* [14, утверждение 5.2]. Пусть  $L$  и  $F$  — множества, первое из которых вычислимо. Если множество  $L \cap F$  невычислимо, то множество  $F$  также невычислимо.

## 3 Основной результат

*Теорема 2.* Существует квазимонообразие  $K$  унарных алгебр, такое что множество всех конечных подрешеток решетки квазимонообразий  $\text{Lq}(K)$  невычислимо, но не  $Q$ -универсальное.

*Схема доказательства теоремы 2.* Сначала, используя теорему 1 и лемму 1, покажем, что существует квазимонообразие  $K$  унарных алгебр такое, что множество всех конечных подрешеток решетки  $\text{Lq}(K)$  невычислимо. Это означает, что нет алгоритма, который для данной конечной решетки определял бы, вложима ли эта решетка в рассматриваемую решетку квазимонообразий  $\text{Lq}(K)$  унарных алгебр или нет. Затем, используя лемму 2, покажем, что это квазимонообразие  $K$  не является  $Q$ -универсальным, поскольку  $Q$ -универсальные решетки квазимонообразий не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству [5; 273].

*Доказательство теоремы 2.* Пусть множество  $N \subseteq \omega \setminus \{0, 1, 2\}$  невычислимо и  $\{\mathcal{K}_n \mid n \in N\}$  — класс конечных нижних полурешеток типа «корона» (см. рис.).

Рисунок. Нижняя полурешетка  $\mathcal{K}_n$  типа «корона»

Согласно теореме 1, примененной к классу  $\{\mathcal{K}_n \mid n \in N\}$ , существует квазимногообразие  $K$  унарных алгебр, такое что

$$\text{Lq}(\mathbf{K}) \leq_s \prod_{n \in N} \text{Sub}(\mathcal{K}_n) \times 2.$$

Согласно [1, лемма 17], решетка  $\text{Sub}(\mathcal{K}_n)$  подпрямой неразложима для любого  $n > 2$ . Согласно [1, лемма 18], решетка  $\text{Sub}(\mathcal{K}_n)$  вложима в  $\text{Sub}(\mathcal{K}_m)$  тогда и только тогда, когда  $n = m$  (для любых  $n, m > 2$ ). Пусть

$$L = \{\text{Sub}(\mathcal{K}_n) \mid n > 2\} \quad \text{и} \quad M = \{\text{Sub}(\mathcal{K}_n) \mid n \in N\}.$$

Тогда  $M = L \cap S(\text{Lq}(K))$ , поскольку решетка  $\text{Sub}(\mathcal{K}_m)$  вложима  $\prod_{n \in N} \text{Sub}(\mathcal{K}_n)$  в точности тогда, когда  $m \in N$ , и, следовательно, решетка  $\text{Sub}(\mathcal{K}_m)$  вложима в  $\text{Lq}(K)$  тогда и только тогда, когда  $m \in N$ , т.е.  $\text{Sub}(\mathcal{K}_m) \in M$ . Таким образом, решетка  $\text{Lq}(K)$  такова, что множество всех ее конечных подрешеток невычислимо, согласно лемме 1.

Прежде чем показать, что построенное квазимногообразие  $K$  унарных алгебр не является  $Q$ -универсальным, докажем лемму 2. Тождество  $H_n$  было рассмотрено в [15] и имеет вид

$$U_n = \bigvee_{0 \leq i \leq n-1} V_{i,n} \vee \bigvee_{0 \leq i \leq n-2} W_{i,n},$$

где решеточные термы от переменных  $x_0, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n$  определены следующим образом:

$$U_n = U_{0,n}$$

$$U_{n,n} = x_n$$

$$U_{i,n} = x_i \wedge (U_{i+1,n} \vee x'_{i+1}), \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

$$V_{i,n} = V_{i,0,n}, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

$$V_{i,i,n} = (x_i \wedge U_{i+1,n}) \vee (x_i \wedge x'_{i+1}), \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

$$V_{i,j,n} = x_j \wedge (V_{i,j+1,n} \vee x'_{j+1}), \quad 0 \leq j < i \leq n-1,$$

$$W_{i,n} = W_{i,0,n}, \quad 0 \leq i \leq n-2,$$

$$W_{i,i,n} = x_i \wedge (x'_{i+1} \vee x'_{i+2}) \wedge ((U_{i+1,n} \wedge (x_i \vee x'_{i+2})) \vee x'_{i+1}), \quad 0 \leq i \leq n-2,$$

$$W_{i,j,n} = x_j \wedge (W_{i,j+1,n} \vee x'_{j+1}), \quad 0 \leq j < i \leq n-2.$$

Тогда  $H_3$

$$U_3 = \bigvee_{0 \leq i \leq 2} V_{i,3} \vee \bigvee_{0 \leq i \leq 1} W_{i,3},$$

или

$$U_3 = (V_{0,3} \vee V_{1,3} \vee V_{2,3}) \vee (W_{0,3} \vee W_{1,3}).$$

Обозначим  $V_3 = (V_{0,3} \vee V_{1,3} \vee V_{2,3}) \vee (W_{0,3} \vee W_{1,3})$ . Тогда  $H_3$  примет вид  $U_3 = V_3$ .

**Лемма 2.** Решетка  $\prod_{n \in N} \text{Sub}(\mathcal{K}_n)$  для любого множества  $N \subseteq \omega \setminus \{0, 1, 2\}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству  $H_3$ .

**Доказательство леммы 2.** Сначала покажем, что решетка  $\text{Sub}(\mathcal{K}_n)$  для любого  $n \in N$  удовлетворяет тождеству  $H_3$ . Согласно [15, лемма 5.2], следующие неравенства выполняются в каждой решетке ( $n \in Z^+$ ):

$$V_{i,n} \leq U_n, \quad 0 \leq i \leq n-1;$$

$$W_{i,n} \leq U_n, \quad 0 \leq i \leq n-2.$$

Если  $n = 3$ , то

$$V_{i,3} \leq U_3, 0 \leq i \leq 2 \quad \text{и} \quad W_{i,3} \leq U_3, 0 \leq i \leq 1.$$

Тогда  $V_3 \leq U_3$ . Осталось доказать, что  $U_3 \leq V_3$ . Все термы  $x_0, x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$  интерпретируем как подполурешетки «короны»  $\mathcal{K}_n$ , соответственно,  $X_0, X_1, X_2, X_3, X'_1, X'_2, X'_3$ .

Пусть произвольно взятый элемент  $a_0 \in K_n$  лежит в  $U_3$ . Тогда  $a_0$ , с одной стороны, лежит в  $X_0$ , которая является подполурешеткой в  $\mathcal{K}_n$ , а с другой — в  $U_{1,3} + X'_1$ . Если элемент  $a_0 \in K_n$  лежит в  $U_{1,3} + X'_1$ , то найдутся элементы  $a_1 \in U_{1,3}$  и  $b_1 \in X'_1$ , такие что  $a_0 = a_1 \wedge b_1$ . Если  $a_0 = a_1$  или  $a_0 = b_1$ , то

$$a_0 \in (X_0 \cap U_{1,3}) \cup (X_0 \cap X'_1).$$

Таким образом,  $a_0 \in K_n$  лежит в  $V_{0,3}$  и, следовательно, принадлежит  $V_3$ .

Если пересечение строгое:  $a_0 = a_1 \wedge b_1$ ,  $a_0 < a_1$ ,  $a_0 < b_1$ , то из условия  $a_1 \in U_{1,3}$  следует, что элемент  $a_1$ , с одной стороны, лежит в  $X_1$ , которая является подполурешеткой в  $\mathcal{K}_n$ , а с другой — в  $U_{2,3} + X'_2$ . Если элемент  $a_1$  лежит в  $U_{2,3} + X'_2$ , то найдутся элементы  $a_2 \in U_{2,3}$  и  $b_2 \in X'_2$ , такие что  $a_1 = a_2 \wedge b_2$ . Если  $a_1 = a_2$  или  $a_1 = b_2$ , то

$$a_1 \in (X_1 \cap U_{2,3}) \cup (X_1 \cap X'_2).$$

Тогда если  $a_0 \in X_0$  и  $a_0 = a_1 \wedge b_1$ , где  $a_1 \in (X_1 \cap U_{2,3}) \cup (X_1 \cap X'_2)$  и  $b_1 \in X'_1$ , то элемент  $a_0 \in K_n$  лежит в  $V_{1,3}$  и, следовательно, принадлежит  $V_3$ .

Если пересечение вновь строгое:  $a_1 = a_2 \wedge b_2$ ,  $a_1 < a_2$ ,  $a_1 < b_2$ , то из условия  $a_2 \in U_{2,3}$  следует, что элемент  $a_2$ , с одной стороны, лежит в  $X_2$ , которая является подполурешеткой в  $\mathcal{K}_n$ , а с другой — в  $X_3 + X'_3$ . Если элемент  $a_2$  лежит в  $X_3 + X'_3$ , то найдутся элементы  $a_3 \in X_3$  и  $b_3 \in X'_3$ , такие что  $a_2 = a_3 \wedge b_3$ . Если  $a_2 = a_3$  или  $a_2 = b_3$ , то

$$a_2 \in (X_2 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X'_3).$$

Тогда если  $a_0 \in X_0$  и  $a_0 = a_1 \wedge b_1$ , где  $b_1 \in X'_1$ , а  $a_1 \in X_1$  и  $a_1 = a_2 \wedge b_2$ , где  $a_2 \in (X_2 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X'_3)$ ,  $b_2 \in X'_2$ , то элемент  $a_0 \in K_n$  лежит в  $V_{2,3}$  и, следовательно, принадлежит  $V_3$ .

Когда пересечение строгое:  $a_2 = a_3 \wedge b_3$ ,  $a_2 < a_3$ ,  $a_2 < b_3$ , получим, что  $a_0 \in X_0$  и  $a_0 = a_1 \wedge b_1$ , где  $b_1 \in X'_1$ , а  $a_1 \in X_1$  и  $a_1 = a_2 \wedge b_2$ , где  $b_2 \in X'_2$ ,  $a_2 \in X_2$  и  $a_2 = a_3 \wedge b_3$ , где  $a_3 \in X_3$  и  $b_3 \in X'_3$ . Имеем цепь

$$a_0 - a_1 - a_2 - a_3 \quad (a_0 < a_1, a_1 < a_2, a_2 < a_3)$$

длины 3, чего не может быть, поскольку в «короне»  $\mathcal{K}_n$  длина максимальной цепи равна 2. Полученное противоречие завершает доказательство того факта, что  $\text{Sub}(\mathcal{K}_n)$  для любого  $n \in N$  удовлетворяет тождеству  $H_3$ . Тогда, поскольку тождества мультипликативно устойчивы [13; 189], решетка  $\prod_{n \in N} \text{Sub}(\mathcal{K}_n)$  тоже будет удовлетворять  $H_3$ .

*Лемма 2 доказана.*

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы. Поскольку  $\prod_{n \in N} \text{Sub}(\mathcal{K}_n)$  удовлетворяет  $H_3$ , согласно доказанной выше лемме 2, то  $H_3$  будет выполняться и на  $\text{Lq}(K)$ , так как известно, что тождества устойчивы относительно перехода к подсистемам [13; 189].  $Q$ -универсальные решетки квазимногообразий не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству [5; 273], вследствие чего построенное квазимногообразие  $K$  унаров не будет  $Q$ -универсальным.

*Теорема 2 доказана.*

Поскольку число невычислимых подмножеств счетного множества континуально, будет справедлива следующая теорема.

*Теорема 3.* Существует континуум квазимногообразий  $K$  унарных алгебр, таких что множества всех конечных подрешеток их решеток квазимногообразий  $\text{Lq}(K)$  невычислимы, но, тем не менее, не  $Q$ -универсальны.

Заметим, что результат, аналогичный теоремам 2 и 3, справедлив и для классов унарных алгебр, не являющихся квазимногообразиями. Этот результат будет следовать из [9, теорема 3.4], [1, лемма 3] и леммы 2. Вопрос о сложности решеток квазимногообразий изучался многими авторами. В литературе есть примеры классов  $K$ , таких что множества всех конечных подрешеток решеток  $\text{Lq}(K)$  невычислимы [1, 9, 12, 14]. Также известно очень много различных  $Q$ -универсальных классов [5; 274]. Предполагалось, что имеется связь между этими мерами сложности [9, 12]. Однако автором показано, что класс  $K$  систем фиксированной сигнатуры, такой что множество всех конечных подрешеток решетки  $\text{Lq}(K)$  невычислимо,

может быть и не  $Q$ -универсальным. Найден континуум классов (квазимногообразий)  $K$  унарных алгебр, для которых решетки квазимногообразий  $Lq(K)$  согласно одной мере являются сложными, а согласно другой — нет.

#### Список литературы

- 1 *Nurakunov A.M.* Unreasonable lattices of quasivarieties // Intern. Journal Algebra Comput. — 2012. — No. 22(3). — P. 1–17.
- 2 *Карташов В.К.* Квазимногообразия унаров // Мат. заметки. — 1980. — № 27. — С. 5–12.
- 3 *Карташов В.К.* Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов // Алгебра и логика. — 1980. — № 19. — С. 106–120.
- 4 *Карташов В.К.* Решетки квазимногообразий унаров // Сиб. мат. журн. — 1980 — № 19. — С. 346–357.
- 5 *Горбунов В.А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. — Новосибирск: Науч. кн., 1999. — 368 с.
- 6 *Birkhoff G.* Universal algebra // Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress (Montreal, 1945). — Toronto: The University of Toronto Press, 1946. — P. 310–326.
- 7 *Мальцев А.И.* О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики // Тр. Междунар. мат. конгр. (Москва, 1966). — М.: Мир, 1968. — С. 217–231.
- 8 *Sapir M.V.* The lattice of quasivarieties of semigroups // Algebra Universalis. — 1985. — No. 21. — P. 172–180.
- 9 *Швидефски М.В.* О сложности решеток квазимногообразий // Алгебра и логика. — 2015. — № 3. — С. 381–398.
- 10 *Gorbunov V.A.* Structure of lattices of varieties and of lattices of quasivarieties: Similarity and difference. III // Algebra Logic. — 1995. — No. 34. — P. 359–370.
- 11 *Kravchenko A.V.* Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras // Siberian Adv. Math. — 2002. — No. 12. — P. 63–76.
- 12 *Schwedzky M.V., Zamojska-Dzienio A.* Lattices of subclasses. II // Intern. Journal Algebra Comput. — 2014. — No. 24. — P. 1099–1126.
- 13 *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.
- 14 *Нуракунув А.М.* Решетки квазимногообразий точечных абелевых групп // Алгебра и логика. — 2014. — № 53. — С. 372–400.
- 15 *Semenova M.V., Wehrung F.* Sublattices of lattices of order-convex sets. II. Posets of finite height // Intern. Journal Algebra Comput. — 2003. — Vol. 13. — No. 5. — P. 543–564.

С.М. Луцак

### Унарлық алгебра квазикөпбейне торларының күрделілігі

Мәселе квазикөпбейне торлардың күрделілігі деп нені санау керек және квазикөпбейне торлардың қайсысын күрделі немесе басқа өлшеміне сәйкес кашан күрделі болып табылады, ал қайсылары күрделі болмайды көптеген авторлар жұмыстарында зерттелген. Мақалада квазикөпбейне торлар күрделілігінің екі өлшемі қарастырылды. Унарлық алгебра квазикөпбейне торлар құрылысы күрделілігі жан-жақты талданды. Квазикөпбейне торлардың күрделілігінің екі өлшемі арасындағы байланыс зерттелді. Кезінде М.В. Швидефски және А. Замойска-Дженио де бұл мәселеге тоқталған.  $Q$ -әмбебап болып табылмайтын, бірақ иррационалды болып табылатын класс бар ма? Унарлық алгебралар квазикөпбейне торларында тривиалды емес тепе-теңдігінің орындалатынын дәлелдеді; сол әрекет арқылы белгілі бір нәтиже алынды.

*Кілт сөздер:* орындалмайтын жиын, квазикөпбейне, тор,  $Q$ -әмбебаптылық, унарлы функционалды символ, торлардың күрделілігі.

## The complexity of quasivariety lattices of unary algebras

The question of what is considered as the complexity of the lattice of quasivarieties and what lattices of quasivarieties are complex according to some degree of complexity, and which are not, has been studied by many authors. The paper considers two measures of complexity of lattices of quasivarieties. A study is made of the complexity of the lattice structure of quasivarieties of unary algebras. The relationship between two measures of the complexity of lattices of quasivarieties is studied. M.V. Schwiedefsky and A. Zamojska-Jenio, the following problem was posed: is there a non-Q-universal class for which the set of all finite sublattices of the lattice of quasivarieties is not computable? The author has proved the non-trivial identity satisfying on the lattices of quasivarieties of unary algebras, as a result of which a certain result is obtained with respect to this problem.

*Keywords:* noncomputable set, lattices of quasivarieties, Q-universality, unary function symbol, lower semi-lattice, unary algebra, the complexity of the lattice.

### References

- 1 Nurakunov A.M. *Internat. Journal Algebra Comput.*, 2012, 22(3), p. 1–17.
- 2 Kartashov V.K. *Math. Notes*, 1980, 27, p. 5–12.
- 3 Kartashov V.K. *Algebra Logic*, 1980, 19, p. 106–120.
- 4 Kartashov V.K. *Siberian Math. Journal*, 1980, 19, p. 346–357.
- 5 Gorbunov V.A. *Algebraic Theory of Quasivarieties*, Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1999, 368 p.
- 6 Birkhoff G. *Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress*, Toronto: The University of Toronto Press, 1946, p. 310–326.
- 7 Maltsev A.I. *Proceedings of the Intern. Mathematical Congress*, Moscow: Mir, 1968, p. 217–231.
- 8 Sapir M.V. *Algebra Universalis*, 1985, 21, p. 172–180.
- 9 Schwiedefsky M.V. *Algebra Logic*, 2015, 54, 3, p. 381–398.
- 10 Gorbunov V.A. *Algebra Logic*, 1995, 34, p. 359–370.
- 11 Kravchenko A.V. *Siberian Adv. Math.*, 2002, 12, p. 63–76.
- 12 Schwiedefsky M.V., Zamojska-Dzienio A. *Intern. Journal Algebra Comput.*, 2014, 24, p. 1099–1126.
- 13 Maltsev A.I. *Algebraic Structures*, Moscow: Nauka, 1970, 392 p.
- 14 Nurakunov A.M. *Algebra Logic*, 2014, 53, p. 372–400.
- 15 Semenova M.V., Wehrung F. *Intern. Journal Algebra Comput.*, 2003, 13, 5, p. 543–564.

---

## АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ INFORMATION ABOUT AUTHORS

- Akimov, A.V.** — PhD, Assistant Professor, Kherson State Maritime Academy, Subdepartment of Mechanical Engineering and general training, Ukraine.
- Al-Dzhavakheri, Ali Andan Mansur** — Postgraduate, Kherson State Maritime Academy, Subdepartment of Mechanical Engineering and general training, Ukraine.
- Balkizov, Zh.A.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of equations of mixed type, Institute of Applied Mathematics and Automation - Branch of Federal State Budgetary Scientific Center «Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences», Nalchik, Russia.
- Brailo, N.V.** — PhD, elder, Kherson State Maritime Academy, Subdepartment of Mechanical Engineering and general training, Ukraine.
- Buketov, A.V.** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of subdepartment for Ship Propulsion Plant Operation and General Engineering, Kherson State Maritime Academy, Ukraine.
- Ibraev, Sh.Sh.** — Candidate of Physical and Mathematical Science, Head of the Department of Mathematics, Informatics, Information systems and desing, «Bolashak» University, Kyzylorda, Kazakhstan.
- Iskakov, S.A.** — PhD students of the 1st year of study, Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.
- Iskakova, G.Sh.** — Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor of «Mathematical Analysis and Differential Equations», Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.
- Jenaliyev, M.T.** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of SC MES RK, Almaty, Kazakhstan.
- Konyrkhanova, A.A.** — PhD student of 3 course speciality 6D060100 — «Mathematics», D.Serikbayev East Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan.
- Lutsak, S.M.** — Doctoral candidate of PhD, Faculty of Machanics and Mathematics, Department of «Algebra and geometry», PhD in the specialty 6D060100 — «Mathematics», L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.
- Mukasheva, A.K.** — Lecture, Master of Mathematics, A.Bokeihanov school-lyceum, Shahtinsk, Karaganda region, Kazakhstan.
- Nigalatii, V.D.** — Postgraduate, Kherson State Maritime Academy, Assistant, Subdepartment of Mechanical Engineering and general training, Ukraine.
- Orumbayeva, N.T.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate professor, Institute of Applied Mathematics; Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.
- Ramazanov, M.I.** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.
- Roman'kov, V.A.** — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Information systems chair in F.M. Dostoevsky Omsk State University, Russia.
- Sabitbekova, G.** — Master of Mathematics, I.Altynsarin Arkalyk State Pedagogical Institute, Kazakhstan.
- Shaukenova, K.S.** — Senior lecture of the Department «Mathematical Analysis and Differential Equations», Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

---

**Shayakhmetova, B.K.** — Candidate of Pedagogical Sciences, Docent, Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

**Yeshkeyev, A.R.** — Doctor of Physical and Mathematical Science, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

**Zhanbusinova, B.H.** — Candidate of Physical and Mathematical Science, Head of Department «Mathematical Analysis and Differential Equations», Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.